

## পঞ্চম অধ্যায়

# সমীকরণ

বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা বর্ণনায় সমীকরণের উদ্ভব ঘটে। যেমন আমি প্রতিটি 200 টাকা দামের কয়েকটি শার্ট (অন্ততঃ একটি) ও 400 টাকা দামের কয়েকটি প্যান্ট (অন্ততঃ একটি) কিনি। এতে আমার 1500 টাকা খরচ হয়। এই তথ্যকে আমরা  $200s + 400p = 1500$

বা,  $2s + 4p = 15$  আকারে বর্ণনা করতে পারি, যেখানে  $s$  শার্টের সংখ্যা ও  $p$  প্যান্টের সংখ্যা।

$2s + 4p = 15$  একটি সমীকরণ যেখানে  $s$  ও  $p$  অজ্ঞাত রাশি। চলক হিসেবে  $s$  ও  $p$  এর নির্দিষ্ট ডোমেন রয়েছে, যা থেকে অজ্ঞাত রাশির নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করাই সমীকরণের লক্ষ্য। এরূপ সমাধান সম্পর্কে নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- দ্বিঘাত সমীকরণ  $(ax^2 + bx + c = 0)$  সমাধান করতে পারবে।
- বর্গমূলবিশিষ্ট সমীকরণ চিহ্নিত করতে পারবে।
- বর্গমূল বিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।
- সূচকীয় সমীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সূচকীয় সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণের জোট সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যাকে দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণে প্রকাশ করে সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলক বিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোট সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ  $(ax^2 + bx + c = 0)$  সমাধান করতে পারবে।

### ৫.১ এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান

আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

নবম-দশম শ্রেণির গণিতে এক চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। সমীকরণের মূলগুলো মূলদ সংখ্যা হলে,  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সহজেই তার সমাধান করা যায়। কিন্তু সব রাশিমালাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না। সে জন্য যেকোনো প্রকার দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতিটি ব্যবহার করা হয়।

এক চলক সংবলিত দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ  $ax^2 + bx + c = 0$ । এখানে  $a, b, c$  বাস্তব সংখ্যা এবং  $a \neq 0$ ।

আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান করি,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

বা,  $a^2x^2 + abx + ac = 0$  [উভয়পক্ষকে  $a$  দ্বারা গুণ করে]

ফর্ম-১২, উচ্চতর গণিত-৯ম-১০ম

$$\text{বা, } (ax)^2 + 2(ax)\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac = 0 \quad \text{বা, } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac$$

$$\text{বা, } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

$$\text{বা, } ax + \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\text{বা, } ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\text{বা, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (i)$$

অতএব,  $x$  এর দুইটি মান পাওয়া গেল এবং মান দুইটি হচ্ছে

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (ii) \quad \text{এবং} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (iii)$$

উপরের (i) নং সমীকরণে  $b^2 - 4ac$  কে দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বলে কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরণ ও প্রকৃতি নির্ণয় করে।

নিশ্চায়কের অবস্থানভেদে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধরণ ও প্রকৃতি

(i)  $b^2 - 4ac > 0$  এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

(ii)  $b^2 - 4ac > 0$  কিন্তু পূর্ণবর্গ না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

(iii)  $b^2 - 4ac = 0$  হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে। এক্ষেত্রে  $x = -\frac{b}{2a}, -\frac{b}{2a}$  .

(iv)  $b^2 - 4ac < 0$  অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে বাস্তব মূল নাই।

**উদাহরণ ১।**  $x^2 - 5x + 6 = 0$  এর সমাধান কর।

**সমাধান :**  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায়  $a = 1, b = -5$  এবং  $c = 6$  .

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} = \frac{5+1}{2}, \frac{5-1}{2} \end{aligned}$$

অর্থাৎ  $x_1 = 3, x_2 = 2$  .

উদাহরণ ২।  $x^2 - 6x + 9 = 0$  এর সমাধান কর।

সমাধান :  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায়  $a = 1, b = -6$  এবং  $c = 9$  .

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

অর্থাৎ  $x_1 = 3, x_2 = 3$  .

উদাহরণ ৩। সমাধান কর :  $x^2 - 2x - 2 = 0$

সমাধান : আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়,  $a = 1, b = -2, c = -2$  .

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\text{বা, } x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2}$$

অর্থাৎ  $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$  .

এখানে লক্ষণীয় যে, সাধারণ নিয়মে মূলদ সংখ্যার সাহায্যে  $x^2 - 2x - 1$  কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না গেলেও প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান করা সম্ভব হয়েছে।

উদাহরণ ৪। সমাধান কর :  $3 - 4x - x^2 = 0$

সমাধান : দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপের সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়,  $a = -1, b = -4, c = 3$  .

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-1).3}}{2.(-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{-2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{-2}$$

$$\text{বা, } x = -(2 \pm \sqrt{7})$$

অর্থাৎ  $x_1 = -2 - \sqrt{7}, x_2 = -2 + \sqrt{7}$  .

কাজ : উপরের (ii) ও (iii) নং সূত্রের সাহায্যে  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণ হতে মূল  $x_1$  এবং  $x_2$  এর মান নির্ণয় কর যখন (i)  $b = 0$ , (ii)  $c = 0$  (iii)  $b = c = 0$  (iv)  $a = 1$  এবং (v)  $a = 1, b = c = 2p$

### অনুশীলনী ৫.১

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর :

$$১। \quad 2x^2 + 9x + 9 = 0$$

$$২। \quad 3 - 4x - 2x^2 = 0$$

$$৩। \quad 4x - 1 - x^2 = 0$$

$$৪। \quad 2x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$৫। \quad 3x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$৬। \quad 2 - 3x^2 + 9x = 0$$

$$৭। \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$৮। \quad 2x^2 + 7x - 1 = 0$$

$$৯। \quad 7x - 2 - 3x^2 = 0$$

### ৫.২। মূল চিহ্ন সংবলিত সমীকরণ

সমীকরণে চলকের বর্গমূল সংবলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করে যে মূলগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো মূল প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের মূল অবান্তর (Extraneous) মূল। সুতরাং মূলচিহ্ন সংবলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মূলগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল কি না তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব মূল উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের মূল। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

|  |
|--|
| <p>কাজ: <math>p = \sqrt{\frac{x}{x+16}}</math> ধরে <math>\sqrt{\frac{x}{x+16}} + \sqrt{\frac{x+16}{x}} = \frac{25}{12}</math> সমীকরণটির সমাধান করে শূন্য পরীক্ষা কর।</p> |
|--|

উদাহরণ ১। সমাধান কর :  $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

সমাধান :  $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

বা,  $\sqrt{2x+15} + \sqrt{2x-6} = \sqrt{8x+9}$

বা,  $2x+15 + 2x-6 + 2\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6} = 8x+9$  [বর্গ করে]

বা,  $\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6} = 2x$

বা,  $(2x+15)(2x-6) = 4x^2$  [পুনরায় বর্গ করে]

বা,  $4x^2 + 18x - 90 = 4x^2$

বা,  $18x = 90$

$\therefore x = 5$

শূন্য পরীক্ষা :  $x = 5$  হলে, বামপক্ষ =  $\sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2$  এবং ডানপক্ষ =  $\sqrt{4} = 2$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x = 5$ .

উদাহরণ ২। সমাধান কর :  $\sqrt{2x+8} - 2\sqrt{x+5} + 2 = 0$

সমাধান :  $\sqrt{2x+8} = 2\sqrt{x+5} - 2$

বা,  $2x+8 = 4(x+5) + 4 - 8\sqrt{x+5}$  [বর্গ করে]

বা,  $8\sqrt{x+5} = 4x+20+4-2x-8$  [পক্ষান্তর করে]

বা,  $8\sqrt{x+5} = 2x+16 = 2(x+8)$

বা,  $4\sqrt{x+5} = x+8$

বা,  $16(x+5) = x^2 + 16x + 64$  [বর্গ করে]

বা,  $16 = x^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

শুদ্ধি পরীক্ষা :  $x = 4$  হলে, বামপক্ষ =  $\sqrt{16} - 2\sqrt{9} + 2 = 4 - 2 \times 3 + 2 = 0 =$  ডানপক্ষ

$x = -4$  হলে, বামপক্ষ =  $\sqrt{-8+8} - 2\sqrt{-4+5} + 2 = 0 - 2 \times 1 + 2 = 0 =$  ডানপক্ষ

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x = 4, -4$ .

উদাহরণ ৩। সমাধান কর :  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

সমাধান :  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

বা,  $2x+9+x-4-2\sqrt{2x+9}.\sqrt{x-4} = x+1$  [বর্গ করে]

$$2x+4-2\sqrt{2x+9}.\sqrt{x-4} = 0$$

$$\sqrt{2x+9}.\sqrt{x-4} = x+2$$

বা,  $(2x+9)(x-4) = x^2 + 4x + 4$  [বর্গ করে]

$$\text{বা, } 2x^2 + x - 36 = x^2 + 4x + 4$$

$$\text{বা, } x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$\text{বা, } (x-8)(x+5) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ অথবা } -5$$

শুদ্ধি পরীক্ষা :  $x = 8$  হলে, বামপক্ষ =  $5 - 2 = 3$  এবং ডানপক্ষ =  $3$

অতএব,  $x = 8$  প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$x = -5$  গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে  $x = -5$  বসালে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x = 8$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর :  $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

সমাধান :  $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

$$\text{বা, } \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2} = -\sqrt{x^2 - 7x + 12}$$

$$\text{বা, } x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2 = x^2 - 7x + 12 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{2x^2 - 6x + 4} = 2x - 4$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 6x + 4 = (2x - 4)^2 = 4x^2 - 16x + 16 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{বা, } (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ অথবা } x = 3.$$

শুদ্ধি পরীক্ষা :  $x = 2$  হলে বামপক্ষ =  $\sqrt{2} =$  ডানপক্ষ

$x = 3$  হলে, বামপক্ষ =  $\sqrt{2} =$  ডানপক্ষ

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x = 2, 3$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর :  $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

সমাধান :  $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

এখন  $x^2 - 6x + 13 = y$  ধরে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$$\sqrt{y+2} - \sqrt{y} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$$

$$\text{বা, } \sqrt{y+2} + \sqrt{8} = \sqrt{y} + \sqrt{10}$$

$$\text{বা, } y+2+8+2\sqrt{8y+16} = y+10+2\sqrt{10y} \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{8y+16} = \sqrt{10y}$$

$$\text{বা, } 8y+16=10y \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2y=16 \text{ বা, } y=8$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 13 = 8 \text{ [} y \text{ এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ বা, } (x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ অথবা } 5.$$

$$\text{শুদ্ধি পরীক্ষা : } x=1 \text{ হলে, বামপক্ষ} = \sqrt{10} - \sqrt{8} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$x=5 \text{ হলে, বামপক্ষ} = \sqrt{10} - \sqrt{8} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x=1, 5$$

$$\text{উদাহরণ ৬। সমাধান কর : } (1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{সমাধান : } (1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow 1+x+1-x+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} \right\} = 2 \text{ [ঘন করে]}$$

$$\text{বা, } 2+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{বা, } (1+x)^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{বা, } (1+x)(1-x) = 0 \text{ [আবার ঘন করে]}$$

$$x=1 \text{ এবং } x=-1 \text{ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x=\pm 1$$

## অনুশীলনী ৫.২

সমাধান কর :

$$১। \sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+12}$$

$$২। \sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1}$$

$$৩। \sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$$

$$৪। \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$$

$$৫। \sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$$

$$৬। \sqrt{x^2+4x-4} + \sqrt{x^2+4x-10} = 6$$

$$৭। \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-6x+6} = 1$$

$$৮। \sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{2x^2+5x-9} = 1$$

$$৯। 6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)} + 5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)} = 13$$

$$১০। \sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)} + 2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)} = 3$$

### ৫.৩ সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে।

$2^x = 8, 16^x = 4^{x+2}, 2^{x+1} - 2^x - 8 = 0$  ইত্যাদি সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ যেখানে  $x$  অজ্ঞাত চলক। সূচক সমীকরণ সমাধান করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি প্রায়ই ব্যবহার করা হয়ঃ

$a > 0, a \neq 1$  হলে  $a^x = a^m$  হবে যদি ও কেবল যদি  $x = m$  হয়। এ জন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

কাজ: ১। 4096 কে  $\frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, 2\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}$  এর সূচকে প্রকাশ কর।

২। 729 কে  $3, 9, 27, 16, \sqrt[5]{9}$  এর সূচকে লিখ।

৩।  $\frac{64}{729}$  কে  $\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  এর সূচকে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ১। সমাধান কর :  $2^{x+7} = 4^{x+2}$

সমাধান :  $2^{x+7} = 4^{x+2}$

বা,  $2^{x+7} = (2^2)^{x+2}$

বা,  $2^{x+7} = 2^{2x+4}$

$\therefore x + 7 = 2x + 4$

বা,  $x = 3$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান,  $x = 3$ .

উদাহরণ ২। সমাধান কর :  $3 \cdot 27^x = 9^{x+4}$

সমাধান :  $3 \cdot 27^x = 9^{x+4}$

বা,  $3 \cdot (3^3)^x = (3^2)^{x+4}$

বা,  $3 \cdot 3^{3x} = 3^{2(x+4)}$

বা,  $3^{3x+1} = 3^{2x+8}$

$\therefore 3x + 1 = 2x + 8$

বা,  $x = 7$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x = 7$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর :  $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}, (a > 0, a \neq 3, m \neq 0)$

সমাধান :  $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$

বা,  $\frac{3^{mx-1}}{3} = 3a^{mx-2}$  [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা,  $3^{mx-2} = a^{mx-2}$

বা,  $\left(\frac{a}{3}\right)^{mx-2} = 1 = \left(\frac{a}{3}\right)^0$

বা,  $mx - 2 = 0$

বা,  $mx = 2$

$$\text{বা, } x = \frac{2}{m}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = \frac{2}{m}$$

$$\text{উদাহরণ ৪। সমাধান কর : } 2^{3x-5} \cdot a^{x-2} = 2^{x-3} \cdot 2a^{1-x}, (a > 0 \text{ এবং } a \neq \frac{1}{2})$$

$$\text{সমাধান : } 2^{3x-5} \cdot a^{x-2} = 2^{x-3} \cdot 2a^{1-x}$$

$$\text{বা, } \frac{a^{x-2}}{a^{1-x}} = \frac{2^{x-3} \cdot 2^1}{2^{3x-5}} \quad \text{বা, } a^{x-2-1+x} = 2^{x-3+1-3x+5}$$

$$\text{বা, } a^{2x-3} = 2^{-2x+3} \quad \text{বা, } a^{2x-3} = 2^{-(2x-3)}$$

$$\text{বা, } a^{2x-3} = \frac{1}{2^{2x-3}} \quad \text{বা, } a^{2x-3} \cdot 2^{2x-3} = 1$$

$$\text{বা, } (2a)^{2x-3} = 1 = (2a)^0$$

$$\therefore 2x-3=0 \quad \text{বা, } 2x=3 \quad \text{বা, } x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{উদাহরণ ৫। সমাধান কর : } a^{-x}(a^x + b^{-x}) = \frac{a^2b^2 + 1}{a^2b^2}, (a > 0, b > 0 \text{ এবং } ab \neq 1)$$

$$\text{সমাধান : } a^{-x}(a^x + b^{-x}) = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\text{বা, } a^{-x} \cdot a^x + a^{-x} \cdot b^{-x} = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\text{বা, } 1 + (ab)^{-x} = 1 + (ab)^{-2}$$

$$\text{বা, } (ab)^{-x} = (ab)^{-2}$$

$$\therefore -x = -2$$

$$\text{অর্থাৎ, } x = 2$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = 2$$

$$\text{উদাহরণ ৬। সমাধান কর : } 3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$$

$$\text{সমাধান : } 3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$$

$$\text{বা, } 3^x \cdot 3^5 = 3^x \cdot 3^3 + \frac{8}{3}$$

$$\text{বা, } 3^x \cdot 3^6 - 3^x \cdot 3^4 = 8 \quad [\text{পক্ষান্তর এবং উভয় পক্ষে 3 দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } 3^x \cdot 3^4 (3^2 - 1) = 8$$

$$\text{বা, } 3^{x+4} \cdot 8 = 8$$

$$\text{বা, } 3^{x+4} = 1 = 3^0$$

$$\therefore x+4=0 \quad \text{বা, } x = -4$$



∴ নির্ণেয় সমাধান  $x = -4$

উদাহরণ ৭। সমাধান কর :  $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$

সমাধান :  $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$

$$\text{বা, } \frac{3^{2x}}{9} - \frac{5}{9}.3^x - 66 = 0$$

$$\text{বা, } 3^{2x} - 5.3^x - 594 = 0 \text{ [উভয় পক্ষে 9 দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } a^2 - 5a - 594 = 0 \text{ (} 3^x = a \text{ ধরে)}$$

$$\text{বা, } a^2 - 27a + 22a - 594 = 0$$

$$\text{বা, } (a - 27)(a + 22) = 0$$

$$\text{এখন } a \neq -22, \text{ কেননা } a = 3^x > 0 \text{ সুতরাং } a + 22 \neq 0$$

$$\text{অতএব, } a - 27 = 0$$

$$\text{বা, } 3^x = 27 = 3^3$$

$$\therefore x = 3$$

নির্ণেয় সমাধান  $x = 3$

উদাহরণ ৮। সমাধান কর :  $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0 \text{ (} a > 0, a \neq 1 \text{)}$

সমাধান :  $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$

$$\text{বা, } a^{2x} - a(a^2 + 1)a^{x-1} + a^2 = 0$$

$$\text{বা, } a^{2x} - (a^2 + 1)a^x + a^2 = 0$$

$$\text{বা, } p^2 - (a^2 + 1)p + a^2 = 0 \text{ (} a^x = p \text{ ধরে)}$$

$$\text{বা, } p^2 - a^2p - p + a^2 = 0$$

$$\text{বা, } (p - 1)(p - a^2) = 0$$

$$\therefore p = 1 \quad \text{অথবা } p = a^2$$

$$\text{বা, } a^x = 1 = a^0 \quad \text{বা } a^x = a^2$$

$$\therefore x = 0 \quad \therefore x = 2$$

∴ নির্ণেয় সমাধান  $x = 0, 2$

### অনুশীলনী ৫.৩

সমাধান কর :

১।  $3^{x+2} = 81$

২।  $5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

৩।  $2^{x-4} = 4a^{x-6}, (a > 0, a \neq 2)$

৪।  $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$

৫।  $(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[4]{64})^{2x+7}$

৬।  $\frac{3^{3x-4} \cdot a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5} \text{ (} a > 0 \text{)}$

৭।  $\frac{5^{3x-5} b^{2x-6}}{5^{x+1}} = a^{2x-6} \text{ (} a > 0, b > 0, 5b \neq a \text{)}$

৮।  $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

৯।  $5^x + 5^{2-x} = 26$

১০।  $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

১১।  $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

১২।  $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

### ৫.৪। দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোড়

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি একঘাত সমীকরণ অথবা একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত জোড়ের সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি নবম-দশম শ্রেণির গণিতে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে এরূপ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত কতিপয় জোড়ের সমাধান নির্ণয় আলোচনা করা হলো।

উল্লেখ্য যে, চলক দুইটি  $x$  ও  $y$  হলে  $(x, y) = (a, b)$  এরূপ আকারে জোড়ের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে  $x$  স্থলে  $a$  এবং  $y$  স্থলে  $b$  বসালে তাদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণ ১। সমাধান :  $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, y + \frac{1}{x} = 3$

সমাধান :  $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$  ..... (i)

$y + \frac{1}{x} = 3$  ..... (ii)

(i) থেকে  $xy + 1 = \frac{3}{2}y$  ..... (iii)

(ii) থেকে,  $xy + 1 = 3x$  ..... (iv)

(iii) ও (iv) থেকে  $\frac{3}{2}y = 3x$  বা,  $y = 2x$  ..... (v)

(v) থেকে  $y$  এর মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$2x^2 + 1 = 3x$  বা,  $2x^2 - 3x + 1 = 0$

বা,  $(x-1)(2x-1) = 0 \therefore x = 1$  অথবা  $\frac{1}{2}$

(v) থেকে, যখন  $x = 1$ , তখন  $y = 2$  এবং যখন  $x = \frac{1}{2}$ , তখন  $y = 1$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $(x, y) = (1, 2), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

উদাহরণ ২। সমাধান কর :  $x^2 = 3x + 6y, xy = 5x + 4y$

সমাধান :  $x^2 = 3x + 6y$  ..... (i)

$xy = 5x + 4y$  ..... (ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে,  $x(x - y) = -2(x - y)$

বা,  $x(x - y) + 2(x - y) = 0$

বা,  $(x - y)(x + 2) = 0 \therefore x = y$  ..... (iii)

বা,  $x = -2$  ..... (iv)

(iii) ও (i) থেকে আমরা পাই,  $y^2 = 9y$  বা,  $y(y-9) = 0 \therefore y = 0$  অথবা 9

(iii) থেকে, যখন  $y = 0$  তখন  $x = 0$  এবং যখন  $y = 9$ , তখন  $x = 9$

আবার (iv) ও (i) থেকে আমরা পাই,  $x = -2$  এবং  $4 = -6 + 6y$  বা,  $6y = 10$  বা,  $y = \frac{5}{3}$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $(x, y) = (0, 0), (9, 9), \left(-2, \frac{5}{3}\right)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর :  $x^2 + y^2 = 61$ ,  $xy = -30$

সমাধান :  $x^2 + y^2 = 61$  ..... (i)

$xy = -30$  ..... (ii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) থেকে বিয়োগ করলে আমরা পাই,  $(x - y)^2 = 121$

বা,  $x - y = \pm 11$  ..... (iii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) এর সাথে যোগ করলে পাই  $(x + y)^2 = 1$

বা,  $x + y = \pm 1$  ..... (iv)

(iii) ও (iv) থেকে,

$$\left. \begin{matrix} x + y = 1 \\ x - y = 11 \end{matrix} \right\} \text{ (v)}, \quad \left. \begin{matrix} x + y = 1 \\ x - y = -11 \end{matrix} \right\} \text{ (vi)}, \quad \left. \begin{matrix} x + y = -1 \\ x - y = 11 \end{matrix} \right\} \text{ (vii)}, \quad \left. \begin{matrix} x + y = -1 \\ x - y = -11 \end{matrix} \right\} \text{ (viii)}$$

সমাধান করে পাই,

(v) থেকে,  $x = 6$ ,  $y = -5$ ; (vi) থেকে  $x = -5$ ,  $y = 6$

(vii) থেকে,  $x = 5$ ,  $y = -6$  (viii) থেকে,  $x = -6$ ,  $y = 5$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $(x, y) = (6, -5), (-5, 6), (5, -6), (-6, 5)$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর :  $x^2 - 2xy + 8y^2 = 8$ ,  $3xy - 2y^2 = 4$

সমাধান :  $x^2 - 2xy + 8y^2 = 8$  (i)

$3xy - 2y^2 = 4$  ..... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{x^2 - 2xy + 8y^2}{3xy - 2y^2} = \frac{2}{1} \text{ বা, } x^2 - 2xy + 8y^2 = 6xy - 4y^2$$

বা,  $x^2 - 8xy + 12y^2 = 0$

বা,  $x^2 - 6xy + 2xy + 12y^2 = 0$

বা,  $(x - 6y)(x - 2y) = 0 \therefore x = 6y$  (iii)

অথবা  $x = 2y$  (iv)

(iii) থেকে  $x$  এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$$3.6y.y - 2y^2 = 4 \text{ বা, } 16y^2 = 4 \text{ বা, } y^2 = \frac{1}{4} \text{ বা, } y = \pm \frac{1}{2}$$

(iii) থেকে,  $x = 6 \times \left( \pm \frac{1}{2} \right) = \pm 3$ .

আবার (iv) থেকে  $x$  এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$$3.2y.y - 2y^2 = 4$$

বা,  $4y^2 = 4$

বা,  $y^2 = 1$

বা,  $y = \pm 1$

(iv) থেকে  $x = 2 \times (\pm 1) = \pm 2$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $(x, y) = \left( 3, \frac{1}{2} \right), \left( -3, -\frac{1}{2} \right), (2, 1), (-2, -1)$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর :  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, x^2 + y^2 = 90$

সমাধান :  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \quad (i)$

$x^2 + y^2 = 90 \quad (ii)$

(i) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{5}{2}$$

বা,  $\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}$

$\therefore \frac{2 \times 90}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2} \quad [(ii) \text{ থেকে } x^2 + y^2 = 90 \text{ বসিয়ে}]$

বা,  $x^2 - y^2 = 72 \quad (iii)$

(ii)+(iii) নিলে,  $2x^2 = 162$

বা,  $x^2 = 81$

বা,  $x = \pm 9$

এবং (ii)-(iii) নিলে,  $2y^2 = 18$

বা,  $y^2 = 9$

বা,  $y = \pm 3$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $(x, y) = (9, 3), (9, -3), (-9, 3), (-9, -3)$

কাঙ্ক্ষ :

উদাহরণ ২ এবং ৩ এর সমাধান বিকল্প পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

### অনুশীলনী ৫.৪

সমাধান কর :

$$১। (2x+3)(y-1)=14, (x-3)(y-2)=1$$

$$২। (x-2)(y-1)=3, (x+2)(2y-5)=15$$

$$৩। x^2 = 7x + 6y, y^2 = 7y + 6x$$

$$৪। x^2 = 73x + 2y, y^2 = 3y + 2x$$

$$৫। x + \frac{4}{y} = 1, y + \frac{4}{x} = 25$$

$$৬। y + 3 = \frac{4}{x}, x - 4 = \frac{5}{3y}$$

$$৭। xy - x^2 = 1, y^2 - xy = 2$$

$$৮। x^2 - xy = 14, y^2 + xy = 60$$

$$৯। x^2 + y^2 = 25, xy = 12$$

$$১০। \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, x^2 - y^2 = 3$$

$$১১। x^2 + xy + y^2 = 3, x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$১২। 2x^2 + 3xy + y^2 = 20, 5x^2 + 4y^2 = 41$$

### ৫.৫ দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার

সহসমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনের বহু সমস্যার সমাধান করা যায়। অনেক সময় সমস্যায় দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে হয়। সেক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশি দুইটি  $x$  এবং  $y$  বা অন্য যেকোনো দুইটি স্বতন্ত্র প্রতীক ধরতে হয়। তারপর সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে পরস্পর অনির্ভর, সঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ গঠন করে সমীকরণ জোড়ের সমাধান করলেই অজ্ঞাত রাশি  $x$  এবং  $y$  এর মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ৬৫০ বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ৩২৩ বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

সমাধান : মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ  $x$  মিটার এবং অপরটির বাহুর পরিমাণ  $y$  মিটার।

$$\text{প্রশ্নমতে, } x^2 + y^2 = 650 \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{এবং } xy = 323 \dots\dots\dots(ii)$$

$$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 650 + 646 = 1296$$

$$\text{অর্থাৎ } (x+y) = \pm\sqrt{1296} = \pm 36$$

$$\text{এবং } (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 650 - 646 = 4$$

$$\text{অর্থাৎ } (x-y) = \pm 2$$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ধনাত্মক, সেহেতু  $(x+y)$  এর মান ধনাত্মক হতে হবে।

$$\therefore (x+y) = 36 \dots\dots\dots(iii)$$

$$(x-y) = \pm 2 \dots\dots\dots(iv)$$

$$\text{যোগ করে, } 2x = 36 \pm 2$$

$$\therefore x = \frac{36 \pm 2}{2} = 18 \pm 1 = 19 \text{ বা, } 17$$

সমীকরণ (iii) থেকে পাই,  $y = 36 - x = 17$  বা,  $19$ .

$\therefore$  একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ ১৯ মিটার এবং অপর বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ ১৭ মিটার।

উদাহরণ ২। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা ১০ মিটার কম। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ৬০০ বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য =  $x$  মিটার এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ =  $y$  মিটার

প্রশ্নমতে,  $2y = x + 10$  .....(i)

$$xy = 600 \text{ .....(ii)}$$

সমীকরণ (i) থেকে পাই,  $y = \frac{10 + x}{2}$

সমীকরণ (ii) এ  $y$  এর মান বসিয়ে পাই,  $\frac{x(10 + x)}{2} = 600$

$$\text{বা, } \frac{10x + x^2}{2} = 600 \quad \text{বা, } x^2 + 10x = 1200$$

$$\text{বা, } x^2 + 10x - 1200 = 0 \quad \text{বা, } (x + 40)(x - 30) = 0$$

$$\text{সুতরাং, } (x + 40) = 0 \quad \text{অথবা } (x - 30) = 0$$

$$\text{অর্থাৎ, } x = -40 \quad \text{বা, } x = 30$$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না,

$$\therefore x = 30$$

$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য} = 30 \text{ মিটার।}$$

উদাহরণ ৩। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় ৩, সংখ্যাটির সাথে ১৮ যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক =  $x$  এবং একক স্থানীয় অঙ্ক =  $y$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10x + y$$

$$\text{প্রথম শর্তানুসারে, } \frac{10x + y}{xy} = 3 \quad \text{বা, } 10x + y = 3xy \text{ .....(i)}$$

$$\text{দ্বিতীয় শর্তানুসারে, } 10x + y + 18 = 10y + x \quad \text{বা, } 9x - 9y + 18 = 0$$

$$\text{বা, } x - y + 2 = 0 \quad \text{বা, } y = x + 2 \text{ .....(ii)}$$

$$\text{সমীকরণ (i) এ } y = x + 2 \text{ বসিয়ে পাই, } 10x + x + 2 = 3.x(x + 2)$$

$$\text{বা, } 11x + 2 = 3x^2 + 6x$$

$$\text{বা, } 3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \text{বা, } 3x^2 - 6x + x - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 3x(x - 2) + 1(x - 2) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 2)(3x + 1) = 0$$

$$\text{সুতরাং } (x - 2) = 0 \quad \text{অথবা } (3x + 1) = 0 \quad \text{বা, } 3x = -1$$

$$\text{অর্থাৎ, } x = 2 \quad \text{বা, } x = -\frac{1}{3}$$

কিন্তু সংখ্যার অঙ্ক ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হতে পারে না।

$$\text{সুতরাং } x = 2 \quad \text{এবং } y = x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি } 24$$

### প্রশ্নমালা ৫.৫

- ১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত ?
- ২। দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250। সংখ্যা দুইটির গুণফল 117, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
- ৩। একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ইহার বাহুদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুদ্বয় দ্বারা অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 28 বর্গমিটার হলে, প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
- ৪। দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।
- ৫। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
- ৬। একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
- ৭। একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
- ৮। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- ৯। একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?
- ১০। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং এর অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

### ৫.৬। দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোড়

পূর্ববর্তী এক চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোড়ের সমাধান নির্ণয় করা সম্পর্কে এখানে আলোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১। সমাধান কর :  $a^{x+2} \cdot a^{2y+1} = a^{10}$ ,  $a^{2x} \cdot a^{y+1} = a^9$  ( $a \neq 1$ )

সমাধান :  $a^{x+2} \cdot a^{2y+1} = a^{10}$  (i)  $a^{2x} \cdot a^{y+1} = a^9$  (ii)

(i) থেকে  $a^{x+2y+3} = a^{10}$  বা,  $x+2y+3=10$  বা,  $x+2y-7=0$  (iii)

(ii) থেকে,  $a^{2x+y+1} = a^9$  বা,  $2x+y+1=9$  বা,  $2x+y-8=0$  (iv)

(iii) ও (iv) থেকে বহুগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-16+7} = \frac{y}{-14+8} = \frac{1}{1-4}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-9} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{-3}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = 1$$

$$\text{বা, } x=3, y=2$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (3, 2)$$

$$\text{উদাহরণ ২। সমাধান কর : } 3^{3y-1} = 9^{x+y}, 4^{x+3y} = 16^{2x+3}$$

$$\text{সমাধান : } 3^{3y-1} = 9^{x+y} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{বা, } 3^{3y-1} = (3^2)^{x+y} = 3^{2x+2y}$$

$$\therefore 3y-1 = 2x+2y$$

$$\text{বা, } 2x - y + 1 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

$$4^{x+3y} = 16^{2x+3} \dots\dots\dots (iii)$$

$$\text{বা, } 4^{x+3y} = (4^2)^{2x+3} \text{ বা, } 4^{x+3y} = 4^{4x+6}$$

$$\text{বা, } x+3y = 4x+6 \text{ বা, } 3x-3y+6 = 0$$

$$\text{বা, } x - y + 2 = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

(ii) ও (iv) থেকে বঙ্গগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-2+1} = \frac{y}{1-4} = \frac{1}{-2+1}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-1} = \frac{y}{-3} = -1$$

$$\text{বা, } x=1, y=3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (1, 3)$$

$$\text{উদাহরণ ৩। সমাধান কর : } x^y = y^x, x = 2y$$

$$\text{সমাধান : } x^y = y^x \dots\dots\dots (i) \quad x = 2y \dots\dots\dots (ii) \text{ এখানে } x \neq 0, y \neq 0$$

$$(ii) \text{ থেকে } x \text{ এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, } (2y)^y = y^{2y} \text{ বা, } 2^y \cdot y^y = y^{2y}$$

$$\text{বা, } \frac{y^{2y}}{y^y} = 2^y \text{ বা, } y^y = 2^y \therefore y = 2 \quad (ii) \text{ থেকে, } x = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (4, 2)$$

$$\text{উদাহরণ ৪। সমাধান কর : } x^y = y^2, y^{2y} = x^4, \text{ যেখানে } x \neq 1$$

$$\text{সমাধান : } x^y = y^2 \dots\dots\dots (i), \quad y^{2y} = x^4 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) থেকে পাই,

$$(x^y)^y = (y^2)^y \text{ বা, } x^{y^2} = y^{2y} \dots\dots\dots (iii)$$

$$(iii) \text{ ও (ii) থেকে পাই, } x^{y^2} = x^4$$



$$\therefore y^2 = 4 \text{ বা, } y = \pm 2$$

$$\text{এখন } y = 2 \text{ হলে (i) থেকে পাই, } x^2 = 2^2 = 4 \text{ বা, } x = \pm 2$$

$$\text{আবার, } y = -2 \text{ হলে, (i) থেকে পাই, } (x)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\text{বা, } \frac{1}{x^2} = 4 \text{ বা, } x^2 = \frac{1}{4} \text{ বা, } x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (2, 2), (-2, 2), \left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$\text{উদাহরণ ৫। সমাধান কর : } 8 \cdot 2^{xy} = 4^y, \quad 9^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{27}$$

$$\text{সমাধান : } 8 \cdot 2^{xy} = 4^y \dots\dots\dots (i), \quad 9^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{27} \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ থেকে পাই, } 2^3 \cdot 2^{xy} = (2^2)^y \text{ বা, } 2^{3+xy} = 2^{2y} \quad \therefore 3+xy = 2y \quad (iii)$$

$$(ii) \text{ থেকে পাই, } (3^2)^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{3^3} \text{ বা, } 3^{2x+xy} = 3^{-3} \quad \therefore 2x+xy = -3 \quad (iv)$$

$$(iii) \text{ থেকে (iv) বিয়োগ করে পাই, } 3-2x = 2y+3 \text{ বা, } -x = y \dots\dots\dots (v)$$

$$(v) \text{ থেকে } y \text{ এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই, } 3-x^2 = -2x$$

$$\text{বা, } x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{বা, } (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ অথবা } x = 3$$

$$x = -1 \text{ হলে (v) থেকে পাই, } y = 1; x = 3 \text{ হলে (v) থেকে পাই, } y = -3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (-1, 1), (3, -3)$$

$$\text{উদাহরণ ৬। সমাধান কর : } 18y^x - y^{2x} = 81, 3^x = y^2$$

$$\text{সমাধান : } 18y^x - y^{2x} = 81 \dots\dots\dots (i) \quad 3^x = y^2 \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ থেকে পাই, } y^{2x} - 18y^x + 81 = 0 \quad \text{বা, } (y^x - 9)^2 = 0$$

$$\text{বা, } y^x - 9 = 0 \quad \text{বা, } y^x = 3^2 \dots\dots\dots (iii)$$

$$(ii) \text{ থেকে পাই, } (3^x)^x = (y^2)^x \quad \text{বা, } 3^{x^2} = y^{2x} \dots\dots\dots (iv)$$

$$(iii) \text{ থেকে পাই, } (yx)^2 = (3^2)^2 \quad \text{বা, } y^{2x} = 3^4 \dots\dots\dots (v)$$

$$(iv) \text{ ও (v) থেকে পাই, } 3^{x^2} = 3^4 \quad \therefore x^2 = 4 \text{ বা, } x = \pm 2$$

$$x = 2 \text{ হলে (ii) থেকে পাই, } y^2 = 9 \quad \text{বা, } y = \pm 3$$

$$x = -2 \text{ হলে (iii) থেকে পাই, } y^{-2} = 9 \quad \text{বা, } y^2 = \frac{1}{9} \text{ বা, } y = \pm \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (2, 3), (2, -3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), \left(-2, -\frac{1}{3}\right)$$

## অনুশীলনী-৫.৬

সমাধান কর :

১।  $2^x + 3^y = 31$

$2^x - 3^y = -23$

৪।  $2^x \cdot 3^y = 18$

$2^{2x} \cdot 3^y = 36$

৭।  $y^x = 4$

$y^2 = 2^x$

২।  $3^x = 9^y$

$5^{x+y+1} = 25^{xy}$

৫।  $a^x \cdot a^{y+1} = a^7$

$a^{2y} \cdot a^{3x+5} = a^{20}$

৮।  $4^x = 2^y$

$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

৩।  $3^x \cdot 9^y = 81$

$2x - y = 8$

৬।  $\left. \begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array} \right\} y \neq 1$

৯।  $8y^x - y^{2x} = 16$

$2^x = y^2$

৫.৭ লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ  $ax^2 + bx + c = 0$  এর সমাধান

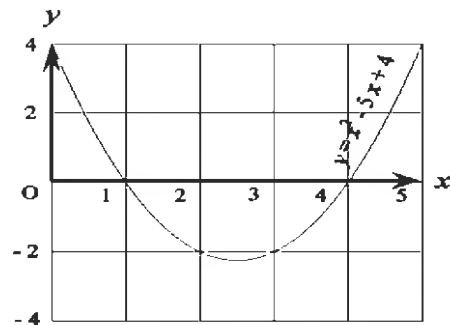
দ্বিঘাত সমীকরণ  $ax^2 + bx + c = 0$  এর সমাধান আমরা ইতোপূর্বে বীজগণিতীয় পদ্ধতিতে শিখেছি। এখন লেখচিত্রের সাহায্যে ইহার সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

মনে করি  $y = ax^2 + bx + c$ । তাহলে  $x$  এর যে সকল মানের জন্য  $y = 0$  হবে অর্থাৎ লেখচিত্রটি  $x$ -অক্ষকে ছেদ করবে,  $x$  এর ঐ সকল মান-ই  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণটির সমাধান।

উদাহরণ ১। লেখচিত্রের সাহায্যে  $x^2 - 5x + 4 = 0$  এর সমাধান কর।সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ..... (i) মনে করি,  $y = x^2 - 5x + 4$ ..... (ii) $x$  এর কয়েকটি মানের জন্য  $y$  এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

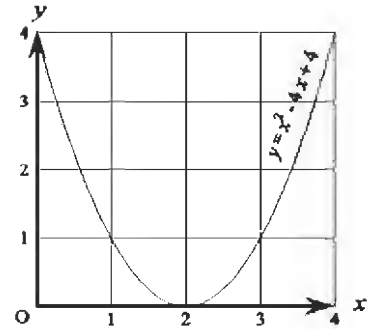
|     |   |   |    |       |    |   |   |
|-----|---|---|----|-------|----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2  | 2.5   | 3  | 4 | 5 |
| $y$ | 4 | 0 | -2 | -2.25 | -2 | 0 | 4 |

উপরের সারণিতে প্রদত্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি  $x$ -অক্ষকে (1, 0) ও (4, 0) বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং, (i) নং এর সমাধান  $x = 1, x = 4$ ।উদাহরণ ২। লেখচিত্রের সাহায্যে  $x^2 - 4x + 4 = 0$  এর সমাধান কর।সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ  $x^2 - 4x + 4 = 0$ ..... (i) মনে করি,  $y = x^2 - 4x + 4$ ..... (ii) $x$  এর কয়েকটি মানের জন্য  $y$  এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

|     |   |   |      |   |      |   |   |
|-----|---|---|------|---|------|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 1.5  | 2 | 2.5  | 3 | 4 |
| $y$ | 4 | 1 | 0.25 | 0 | 0.25 | 1 | 4 |

উপরের সারণি হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রে দেখা যায় যে ইহা  $x$ -অক্ষকে  $(2, 0)$  বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে, সেহেতু (i) নং এর সমাধান হবে  $x = 2, x = 2$ .



উদাহরণ ৩। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :  $x^2 - 2x - 1 = 0$

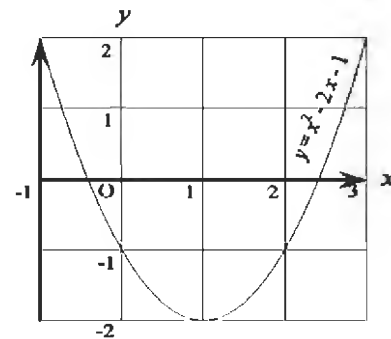
সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ..... (i) মনে করি,  $y = x^2 - 2x - 1$ ..... (ii)

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য  $x$  এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ  $y$  এর মান নির্ণয় করি :

| $x$ | -1 | -0.5 | 0  | 0.5   | 1  | 1.5   | 2  | 2.5  | 3 |
|-----|----|------|----|-------|----|-------|----|------|---|
| $y$ | 2  | 0.25 | -1 | -1.75 | -2 | -1.75 | -1 | 0.25 | 2 |

সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii)

নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি  $x$ -অক্ষকে মোটামুটিভাবে  $(-0.4, 0)$  ও  $(2.4, 0)$  বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং, (i) নং এর সমাধান  $x = -0.4$  (আসন্ন),  $x = 2.4$  (আসন্ন)।



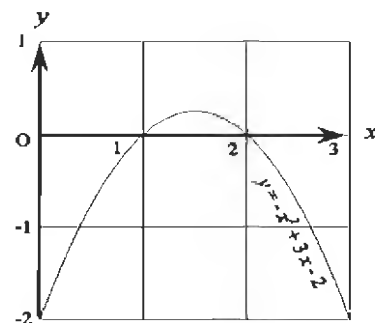
উদাহরণ ৪।  $-x^2 + 3x - 2 = 0$  এর মূলদ্বয় লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ  $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ..... (i) মনে করি,  $y = -x^2 + 3x - 2$ ..... (ii)

$x$  এর কয়েকটি মানের জন্য  $y$  এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দু স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

| $x$ | 0  | 0.5   | 1 | 1.5  | 2 | 2.5   | 3  |
|-----|----|-------|---|------|---|-------|----|
| $y$ | -2 | -0.75 | 0 | 0.25 | 0 | -0.75 | -2 |

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি  $x$ -অক্ষের উপর  $(1, 0)$  ও  $(2, 0)$  বিন্দু দিয়ে গিয়েছে। সুতরাং (i) নং এর সমাধান  $x = 1, x = 2$ .



### অনুশীলনী ৫.৭

- ১।  $x^2 - x - 12 = 0$  সমীকরণটিকে  $ax^2 + bx - c = 0$  এর সাথে তুলনা করে  $b$  এর মান কোনটি?  
 ক. ০ খ. ১  
 গ. -১ ঘ. ৩
- ২।  $16^x = 4^{x+1}$  সমীকরণটির সমাধান কোনটি?  
 ক. ২ খ. ১  
 গ. ৪ ঘ. ৩
- ৩।  $x^2 - x - 13 = 0$  হলে সমীকরণটির একটি মূল কোনটি?  
 ক.  $\frac{-1 + \sqrt{51}}{2}$  খ.  $\frac{-1 - \sqrt{51}}{2}$   
 গ.  $\frac{1 + \sqrt{-51}}{2}$  ঘ.  $\frac{1 + \sqrt{53}}{2}$
- ৪।  $y^x = 9$ ,  $y^2 = 3^x$  সমীকরণ জোড়ের একটি সমাধান  
 ক.  $(-3, -3)$  খ.  $(2, \frac{1}{3})$   
 গ.  $(-2, \frac{1}{3})$  ঘ.  $(-2, 3)$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর ১১ এবং গুণফল ৩০।

৫। সংখ্যা দুইটি কি কি?

- ক. ১ এবং ৩০ খ. ২ এবং ১৫  
 গ. ৫ এবং ৬ ঘ. ৫ এবং -৬

৬। সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?

- ক. ১ খ. ৫  
 গ. ৪১ ঘ.  $\sqrt{41}$

৭। একটি সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি ৬। সম্ভাব্য সমীকরণটির গঠন হবে—

- i  $x + \frac{1}{x} = 6$   
 ii  $x^2 + 1 = 6x$   
 iii  $x^2 - 6x - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক ?

- ক. i ও ii খ. i ও iii  
 গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৮।  $2^{px-1} = 2q^{px-2}$  এর সমাধান কোনটি?

ক.  $\frac{p}{2}$

খ.  $p$

গ.  $-\frac{p}{2}$

ঘ.  $\frac{2}{p}$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর :

৯।  $x^2 - 4x + 3 = 0$

১০।  $x^2 + 2x - 3 = 0$

১১।  $x^2 + 7x = 0$

১২।  $2x^2 - 7x + 3 = 0$

১৩।  $2x^2 - 5x + 2 = 0$

১৪।  $x^2 + 8x + 16 = 0$

১৫।  $x^2 + x - 3 = 0$

১৬।  $x^2 = 8$

১৭। একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির ৫ গুণ থেকে ৩ কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের ৩ গুণ সংখ্যাটির ৫ গুণ থেকে ৩ বেশি।

ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন কর।

খ. সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

১৮। জনাব আশফাক আলীর আয়তাকার এক খন্ড জমির ক্ষেত্রফল ০.১২ হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি কর্ণ

অপেক্ষা ২০ মিটার বেশি। তিনি তাঁর জমি থেকে শ্যামবাবুর নিকট আয়তাকার এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। শ্যাম বাবুর জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা ৫ মিটার বেশি। [১ হেক্টর = ১০,০০০ বর্গ মিটার]

ক. উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

খ. আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. শ্যামবাবুর জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।